

Lời giải đề vào 10 toán chung năm 2024 - 2025

Trần Việt Tùng - Vi Văn Khánh - K42 Chuyên Toán - Chuyên Hùng Vương

1 Trắc nghiệm khách quan

1. B	2. C	3. C	4. B	5. D	6. A
7. A	8. B	9. C	10. D	11. A	12. B

2 Tự luận

Câu 1 (1,5 điểm).

- a) Giải phương trình $x^2 + x - 6 = 0$.
- b) Tính giá trị biểu thức $A = 2\sqrt{28} + 2\sqrt{9} - 4\sqrt{7}$.
- c) Rút gọn biểu thức:

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-3} + \frac{2}{\sqrt{a}+3} \right) : \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-3}$$

với $a \geq 0, a \neq 1, a \neq 9$.

Lời giải

- a) Có $x^2 + x - 6 = 0$, (1).

Biến đổi phương trình ban đầu ta được:

$$\begin{aligned}x^2 + 3x - 2x - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x+3) - 2(x+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x+3) &= 0\end{aligned}$$

Từ đó có $x = 2$ hoặc $x = 3$, thử lại thỏa mãn.

Kết luận: tập nghiệm của phương trình là $\{2; 3\}$.

- b) $A = 2\sqrt{28} + 2\sqrt{9} - 4\sqrt{7} = 2\sqrt{4 \cdot 7} + 2 \cdot 3 - 4\sqrt{7} = 4\sqrt{7} + 5 - 4\sqrt{7} = 6$.

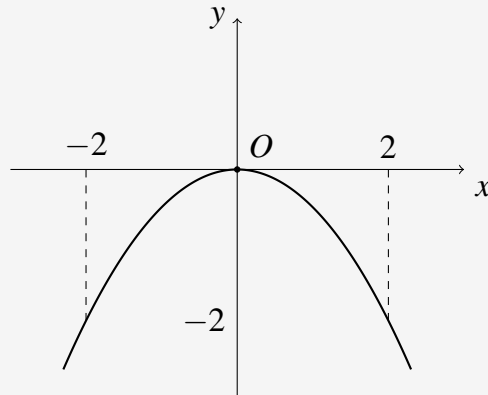
Vậy $A = 6$.

$$\begin{aligned}c) B &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}-3} + \frac{2}{\sqrt{a}+3} \right) : \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-3}, (a \geq 0, a \neq 1, a \neq 9). \\ &= \frac{\sqrt{a}+3+2(\sqrt{a}-3)}{a-9} : \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-3} = \frac{3\sqrt{a}-3}{a-9} \cdot \frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}-1} = \frac{3}{\sqrt{a}+3}.\end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{3}{\sqrt{a}+3}$, $a \geq 0, a \neq 1, a \neq 9$. $\square$

Câu 2 (2,0 điểm).

2.1 a) Cho parabol (P) : $y = (m - 2)x^2$ như hình vẽ.



Tính giá trị biểu thức $P = 4m^2 - 2m + 5$.

b) Cho phương trình $x^2 - (m - 1)x - 3m - 6 = 0$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $|x_1| = 5 + |x_2|$.

2.2 Nhân dịp khai trương, một siêu thị điện máy giảm giá mỗi tivi 20% và giảm giá mỗi máy giặt 15% so với giá niêm yết. Biết tổng số tiền bán một chiếc tivi và một chiếc máy giặt khi chưa giảm giá là 25 triệu đồng. Trong dịp này, nếu khách hàng mua một chiếc tivi và một chiếc máy giặt, thì chỉ phải trả tổng số tiền là 20,5 triệu đồng. Hỏi giá một chiếc tivi, một chiếc máy giặt khi chưa giảm giá là bao nhiêu tiền (đơn vị: triệu đồng)?

Lời giải

2.1 a) Từ hình vẽ ta thấy các điểm $(0; 0)$, $(-2; -2)$ thuộc (P).

Nên (P) : $y = -\frac{1}{2}x^2$. Từ đó có $m - 2 = -\frac{1}{2} \iff m = \frac{3}{2}$.

Suy ra $P = 11$. Vậy $P = 11$.

b) $x^2 - (m - 1)x - 3m - 6 = 0$.

$$\Delta = (m - 1)^2 + 4(3m + 6) = m^2 + 10m + 25 = (m + 5)^2 \geq 0.$$

Từ giả thiết suy ra $x_1 \neq x_2$.

Do đó điều kiện để phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $m \neq -5$.

Từ giả thiết suy ra $(|x_1| - |x_2|)^2 = 25$.

$$\implies x_1^2 + x_2^2 - 2|x_1x_2| = 25.$$

Theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = m - 1$. $x_1 \cdot x_2 = -3m - 6$.

$$\text{Do đó } (m - 1)^2 + 2(3m + 6) - 2|3m + 6| = 25.$$

Nếu $m \geq -2$ thì $(m - 1)^2 = 25 \iff m \in \{6; -4\}$. Nhưng vì $m \geq -2$ nên $m = 6$.

Nếu $m < -2$ thì $(m - 1)^2 + 4(3m + 6) = 25 \iff (m + 5)^2 = 25 \iff m \in \{0; -10\}$.

Nhưng vì $m < -2$ nên $m = -10$.

Từ các trường hợp trên suy ra $m = 6$ hoặc $m = -10$ (thử lại thỏa mãn).

Vậy $m \in \{6; -10\}$.

2.2 Giả sử trước khi giảm giá chiếc tivi có giá h (triệu đồng), chiếc máy giặt có giá t (triệu đồng).

$$\text{Khi đó ta có hệ phương trình: } \begin{cases} h + t = 25 \\ h \cdot 80\% + t \cdot 85\% = 20,5 \end{cases} \implies \begin{cases} h = 15 \\ t = 10 \end{cases}$$

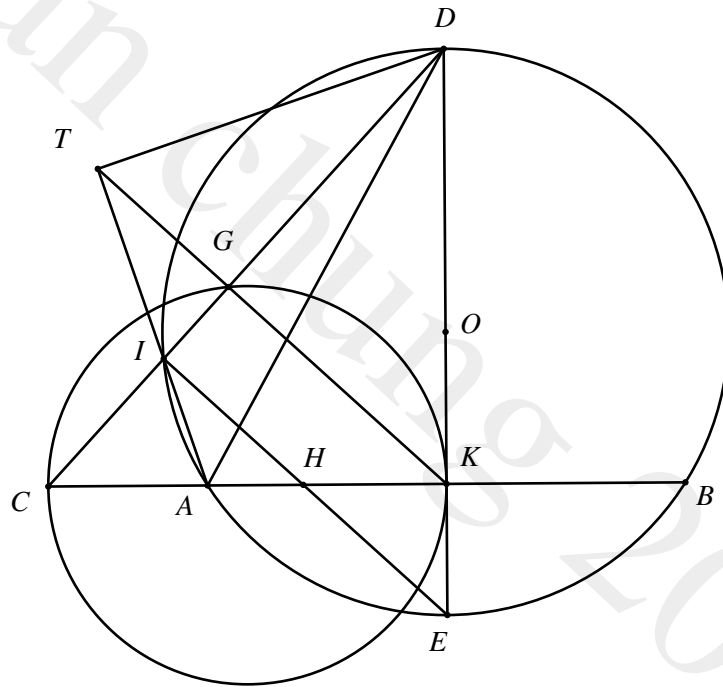
Vậy giá ban đầu của ti vi và máy giặt lần lượt là 15 và 10 triệu đồng. $\square$

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho đường tròn (O) và dây cung AB khác đường kính. Điểm C nằm trên đường thẳng AB sao cho A nằm giữa B và C . Vẽ đường kính DE của (O) vuông góc với dây cung AB tại K (D nằm trên cung lớn AB). Tia CD cắt (O) tại $I \neq D$. $AB \cap EI = H$.

- Chứng minh tứ giác $DIHK$ nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh $CI \cdot CD = CH \cdot CK$ và $HA \cdot IB = HB \cdot IA$.
- Vẽ DT vuông góc với AI tại T , đường tròn đường kính CK cắt đoạn thẳng CD tại G ($G \neq D$). Chứng minh K, G, T thẳng hàng.

Lời giải



Xét thể hình như hình vẽ.

a) Vì DE là đường kính của (O) nên $\angle DIE = 90^\circ$.

Từ giả thiết cũng có $\angle DKH = \angle DKA = 90^\circ$.

Từ đó suy ra $\angle DIH = \angle DIE = \angle DKA = \angle DKH = 90^\circ$.

Cho ta D, I, H, K đồng viên.

b) Vì $\angle ICH = \angle KCD$, $\angle DKC = \angle HIC = 90^\circ$ nên $\triangle CIH \sim \triangle CKD$ (g - g).

Từ đó suy ra $\frac{CH}{CD} = \frac{CI}{CK} \implies CI \cdot CD = CH \cdot CK$.

Có E là điểm chính giữa cung AB , và $I \in (O)$. Nên có IE là phân giác của $\angle AIB$.

Hay IH là phân giác của $\angle AIB$. mà $H \in AB$ nên $\frac{HA}{HB} = \frac{IA}{IB} \iff HA \cdot IB = HB \cdot IA$.

c) Từ giả thiết suy ra $\angle DTA = \angle DKA = 90^\circ$. Từ đó ta có $DTAK$ nội tiếp.

Sự kiện này cho ta $\angle TKA = \angle TDA = 90^\circ - \angle TAD = \angle IAD = \angle IED$, (1).

Lại có $\angle GKA = \angle GKC = 90^\circ - \angle GCK = \angle CDK = \angle IDE$, (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\angle GKA = \angle TKA$.

Cho ta là T, G, K thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Câu 4 (0,5 điểm). Một cây kem ốc quế có chiều cao 18cm, phần thân là lớp vỏ làm bằng bánh quế có dạng là một hình nón, phần đỉnh có dạng là một nửa hình cầu có bán kính bằng 3cm bằng với bán kính của đáy hình nón. Tính thể tích của cả cây kem.

Lời giải.

Ta thấy chiều cao của cây kem bằng chiều cao của hình nón cộng bán kính của hình cầu, như vậy chiều cao của hình nón bằng $18 - 3 = 15\text{cm}$.

Thể tích của hình nón là: $V_1 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 15 = 45\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thể tích phần đỉnh là: $V_2 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 3^2 = 18\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Vậy thể tích cây kem là: $V = V_1 + V_2 = 18\pi + 45\pi = 63\pi \text{ (cm}^3\text{)}$. $\square$

Câu 5 (0,5 điểm). Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} y(x^2 + x) + 2 = (x^4 - x^2)^2 \\ x^2 + x - y = 2\sqrt{x+y} \end{cases}$$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} y(x^2 + x) + 2 = (x^4 - x^2)^2 \\ x^2 + x - y = 2\sqrt{x+y} \end{cases}$

Điều kiện: $x + y \geq 0$

Từ phương trình 2 ta có: $x^2 + 2x + 1 = x + y + 2\sqrt{x+y} + 1 \iff (x+1)^2 = (\sqrt{x+y} + 1)^2$

Khi đó:

$$\begin{cases} x+1 = \sqrt{x+y} + 1 \\ -x-1 = \sqrt{x+y} + 1 \end{cases}$$

Xét các trường hợp:

TH1: $x+1 = \sqrt{x+y} + 1$.

Hay $x = \sqrt{x+y} \implies y = x^2 - x$.

Thay vào phương trình 1 thì được:

$$(x^2 - x)(x^2 + x) + 2 = (x^4 - x^2)^2$$

$\iff (x^4 - x^2) + 2 = (x^4 - x^2)^2$. Đặt $x^4 - x^2 = t$ thì tìm được $t \in \{2, -1\}$.

Hay

$$\begin{cases} x^4 - x^2 = 2 \\ x^4 - x^2 = -1 \end{cases}$$

Ta thấy phương trình $x^4 - x^2 = -1$ vô nghiệm.

Ép $x^4 - x^2 = 2 \implies (x^2 + 1)(x^2 - 2) = 0 \implies x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2} \implies y = 2 \mp \sqrt{2}$

Thử lại thu được bộ thỏa mãn $(\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$.

TH2: $-x - 1 = \sqrt{x+y} + 1 \Rightarrow x + 2 = -\sqrt{x+y} \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x + y \Rightarrow y = x^2 + 3x + 4$

Thay vào phương trình thứ 2 thì được: $(x^2 + 3x + 4)(x^2 + x) + 2 = (x^4 - x^2)^2$

Lại có: $x + 2 = -\sqrt{x+y} \leq 0 \Rightarrow x \leq -2$. Khi đó: $\begin{cases} x(x-1) \geq 6 \\ x(x+1) \leq 2 \end{cases}$

Mà $(x^4 - x^2)^2 = (x^2 - x)^2(x^2 + x)^2 \geq 36(x^2 + x)^2 = (36x^2 + 36x)(x^2 + x)$
 $= (x^2 + 3x + 4)(x^2 + x) + (35x^2 + 33x - 4)(x^2 - x) > (x^2 + 3x + 4)(x^2 - x) + 2$.

Như vậy trường hợp này không có nghiệm.

Tóm lại, bộ nghiệm duy nhất thỏa mãn là $(x, y) = (\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$. $\square$

----- Hết -----