

ĐÁP ÁN MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN SƯ PHẠM NĂM 2025

Môn thi: Toán (Vòng 1)

NGUYỄN KIM SỞ 093.464.1088

Trung tâm Bồi dưỡng và Phát triển tài năng Toán học Nam Sáng – SMATH

Bài toán 1. Cho a, b là các số thực dương phân biệt thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2025}$.

1. Tính giá trị của b biết $a = 2026$.

2. Chứng minh rằng: $\frac{a\sqrt{a-2025} - b\sqrt{b-2025}}{a-b} = \sqrt{a+b}$.

Lời giải:

1. Thay $a = 2026$ vào giả thiết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2025}$ ta được:

$$\frac{1}{2026} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2025}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2025} - \frac{1}{2026} = \frac{1}{2025 \cdot 2026}$$

$$b = 2025 \cdot 2026 = 4102650.$$

Vậy $b = 4102650$ khi $a = 2026$.

2. Để làm các bài toán dạng này, đơn giản ta sẽ khử các hằng số ví dụ 2025 ở vế trái như sau:

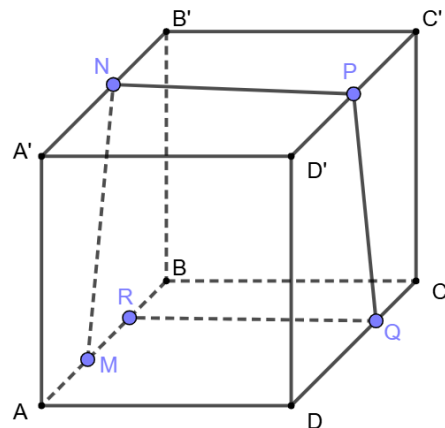
$$\text{Từ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2025} \Rightarrow 2025 = \frac{ab}{a+b}$$

Thay vào biểu thức vế trái ta được:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{a\sqrt{a-2025} - b\sqrt{b-2025}}{a-b} = \frac{a\sqrt{a - \frac{ab}{a+b}} - b\sqrt{b - \frac{ab}{a+b}}}{a-b} \\ &= \frac{a^2 - b^2}{(a-b)\sqrt{a+b}} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)\sqrt{a+b}} = \frac{a+b}{\sqrt{a+b}} = \sqrt{a+b} = VP. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh.

Bài toán 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 30 cm. Trên cạnh AB lấy các điểm M và R sao cho $AM = MR = RB$. Bạn Lan lấy một sợi dây từ điểm M đi qua các cạnh $A'B'$, $C'D'$, CD lần lượt tại các điểm N , P , Q . Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $MN + NP + PQ + QR$.



Lời giải:

Để giải bài tập dạng này chúng ta sử dụng phương pháp “trái hình” như hình vẽ bên.

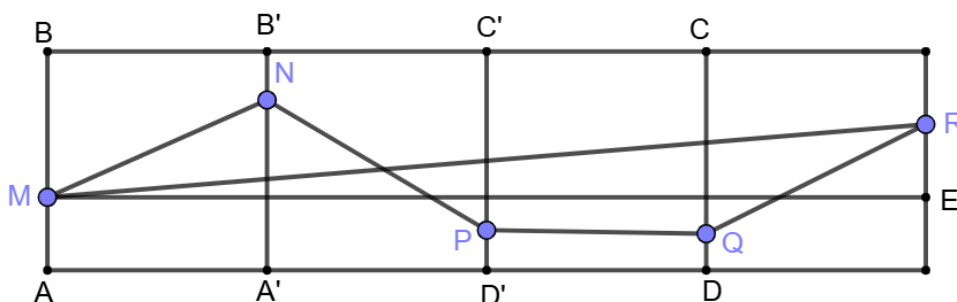
Khi đó: $MN + NP + PQ + QR \geq MR$. Dấu “=” xảy ra khi M , N , P , Q , R thẳng hàng.

Sử dụng định lý Pythagoras ta có:

$$MR^2 = ME^2 + ER^2$$

$$MR^2 = 120^2 + 10^2$$

$$MR = 10\sqrt{145}. \text{ Vậy GTNN của tổng } MN + NP + PQ + QR \text{ là } 10\sqrt{145}.$$



Bài toán 3. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và C là điểm chính giữa cung AB . Trên cung nhỏ AC lấy điểm M bất kì. Đường thẳng AC cắt BM tại H . Gọi K là hình chiếu của H lên AB .

1. Chứng minh rằng bốn điểm A , H , M , K và B , H , C , K cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh rằng KH là phân giác của góc MKC .
3. Chứng minh rằng MK luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên cung nhỏ AC .

Lời giải:

Thực chất đây là bài toán mô hình trục tâm khá quen thuộc.

1. Ta thấy $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\widehat{AMH} = 90^\circ$.

Mặt khác: $HK \perp AB \Rightarrow \widehat{AKH} = 90^\circ$. Do đó các tam giác AMH và AKH đều là các tam giác vuông, chúng cùng nội tiếp đường tròn đường kính AH nên bốn điểm A, H, M, K cùng thuộc một đường tròn.

Chứng minh tương tự cũng có bốn điểm B, H, C, K cùng thuộc một đường tròn.

2. Do AMHK và BCHK là các tứ giác nội tiếp (theo chứng minh trên) nên ta có:

$$\widehat{MKH} = \widehat{MAH} \text{ (cùng chắn cung MH) hay } \widehat{MKH} = \widehat{MAC} \text{ (1).}$$

$$\widehat{CKH} = \widehat{CBH} \text{ (cùng chắn cung CH) hay } \widehat{CKH} = \widehat{CBM} \text{ (2).}$$

Mà $\widehat{MAC} = \widehat{CBM}$ (cùng chắn cung MC), kết hợp với (1) và (2) ta được: $\widehat{MKH} = \widehat{CKH}$ suy ra KH là phân giác của góc MKC.

3. Kéo dài CO cắt (O) tại điểm thứ hai là D. Do C là điểm chính giữa của cung AB nên $\widehat{COB} = \widehat{COA}$ mà $\widehat{COB} + \widehat{COA} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{COB} = \widehat{COA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KOC} = 90^\circ$.

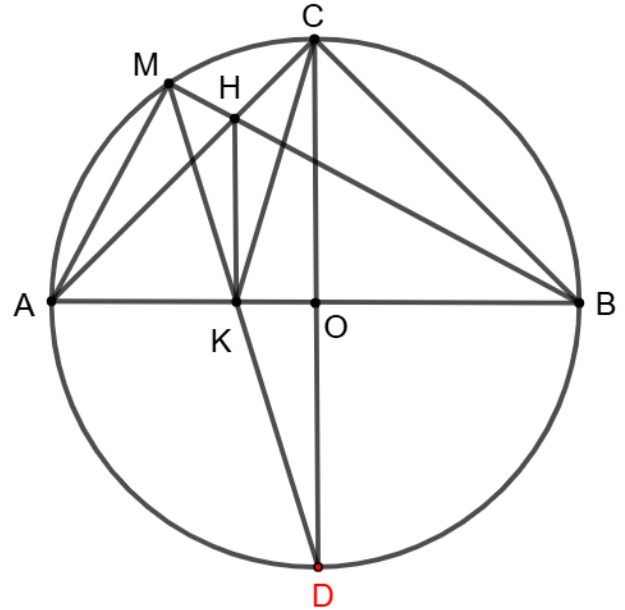
Khi đó tam giác KCD có KO vừa là đường trung tuyến, đồng thời cũng là đường cao nên tam giác KCD cân tại K. Suy ra KO cũng là đường phân giác, nghĩa là $\widehat{CKO} = \widehat{DKO} \Rightarrow \widehat{CKD} = 2\widehat{CKO}$.

Mặt khác, theo chứng minh trên thì KH là phân giác của góc MKC nên $\widehat{MKC} = 2\widehat{CKH}$.

$$\text{Do đó: } \widehat{MKC} + \widehat{CKD} = 2\widehat{CKO} + 2\widehat{CKH} = 2(\widehat{CKO} + \widehat{CKH}) = 2\widehat{HKO} = 2.90^\circ = 180^\circ.$$

Suy ra M, K, D thẳng hàng. Vì C, O cố định nên D cũng cố định, Điều này đồng nghĩa với MK luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên cung nhỏ AC.

Bài toán được chứng minh.



Bài toán 4. Cho 2024 số thực $x_1, x_2, \dots, x_{2023}, x_{2024}$ nhận giá trị bằng $25 - \sqrt{26}$ hoặc $25 + \sqrt{26}$. Hỏi giá trị của biểu thức A nhận bao nhiêu giá trị nguyên khác nhau, biết rằng $A = x_1x_2 + x_3x_4 + \dots + x_{2023}x_{2024}$.

Lời giải:

Trước hết ta thấy các số hạng $x_{2k+1}x_{2k+2}$ ($k = 0, 1, \dots, 1011$) của A có thể nhận những giá trị:

* Hoặc $(25 - \sqrt{26})^2 = 651 - 50\sqrt{26}$;

* Hoặc $(25 + \sqrt{26})^2 = 651 + 50\sqrt{26}$;

* Hoặc $(25 - \sqrt{26})(25 + \sqrt{26}) = 599$.

Để ý rằng các số hạng này độc lập (nghĩa là ta hoàn toàn có thể chọn các giá trị x_i để các số hạng này đạt được giá trị như mong muốn ở trên).

Trong A ta gọi m là số số hạng có giá trị bằng $651 - 50\sqrt{26}$, n là số số hạng có giá trị bằng $651 + 50\sqrt{26}$ và p là số số hạng có giá trị bằng 599 (với $m, n, p \in \mathbb{N}$).

Khi đó ta có:

$$A = m(651 - 50\sqrt{26}) + n(651 + 50\sqrt{26}) + p \cdot 599 = 651(m + n) + 559p + (n - m)\sqrt{26}.$$

Để A nguyên thì $n - m = 0$ hay $m = n$. Như vậy ta có hệ điều kiện:

$$\begin{cases} m + n + p = 1012 \\ m = n \\ m, n, p \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{suy ra } 2m + p = 1012 \Rightarrow p = 1012 - 2m.$$

Do $p \geq 0$ nên $1012 - 2m \geq 0$ hay $m \leq 506$. Khi đó A trở thành:

$$A = 651(m + n) + 559p + (n - m)\sqrt{26} = 104m + 606188.$$

Vì $0 \leq m \leq 506$ mà $m \in \mathbb{N}$ nên m có thể nhận 507 giá trị đồng nghĩa với A có thể nhận 507 giá trị nguyên khác nhau.

Bài toán 5. Cho đường tròn tâm O bán kính bằng 8. Trong đường tròn (O) lấy điểm P cố định sao cho $OP = 5$. Lấy dây AB đi qua điểm P sao cho diện tích của tam giác OAB là số nguyên dương. Tính xác suất để chọn được dây AB sao cho diện tích tam giác OAB là số chẵn.

Lời giải:

Gọi H là giao điểm của đường tròn đường kính OP với dây AB. Khi đó $\widehat{OHP} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra $OH \perp AB$. Đặt $OH = x$ ($0 < x \leq 5$). Lưu ý ta không xét $x = 0$ (do diện tích của tam giác OAB phải là số nguyên dương).

Theo định lý Pythagoras thì:

$$HB = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{64 - x^2}.$$

Tam giác OAB cân tại O có OH là đường cao nên nó đồng thời cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow AB = 2HB = 2\sqrt{64 - x^2}$.

$$\text{Khi đó: } S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OH \cdot AB = \frac{1}{2} x \cdot 2\sqrt{64 - x^2} = x\sqrt{64 - x^2}.$$

$$\text{Từ bất đẳng thức cơ bản } (a - b)^2 \geq 0 \text{ hay } ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \text{ ta có: } x\sqrt{64 - x^2} \leq \frac{x^2 + 64 - x^2}{2} = 32.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = \sqrt{64 - x^2} \text{ hay } x = \sqrt{32} > 5.$$

Suy ra dấu đẳng thức không xảy ra, nghĩa là thực sự $S_{\Delta OAB} < 32$. Vì $S_{\Delta OAB}$ nguyên nên $S_{\Delta OAB} \leq 31$.

Bây giờ chúng ta sẽ kiểm tra xem với mỗi k nguyên mà $0 < k \leq 31$ thì phương trình: $x\sqrt{64 - x^2} = k$ có nghiệm $0 < x \leq 5$ hay không và nếu có thì có bao nhiêu nghiệm.

$$x\sqrt{64 - x^2} = k$$

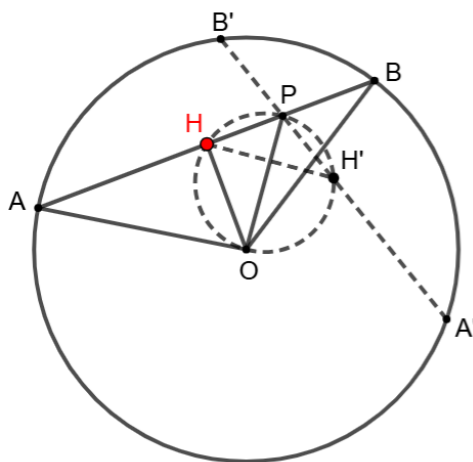
$$x^2(64 - x^2) = k^2$$

$$x^4 - 64x^2 + k^2 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } x^2 = t \quad (0 < t \leq 25) \text{ ta chuyển } (*) \text{ về phương trình bậc hai: } t^2 - 64t + k^2 = 0$$

Ta thấy $\Delta' = 32^2 - k^2 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm:

$$t = 32 - \sqrt{32^2 - k^2}; t = 32 + \sqrt{32^2 - k^2} > 25 \text{ (loại)}.$$



Xét $t = 32 - \sqrt{32^2 - k^2}$, vì $k \leq 31$ nên $t = 32 - \sqrt{32^2 - k^2} \leq 32 - \sqrt{32^2 - 31^2} < 25$ (thỏa mãn).

Khi đó $x^2 = 32 - \sqrt{32^2 - k^2} \Rightarrow x = \sqrt{32 - \sqrt{32^2 - k^2}}$ nghĩa là ứng với mỗi giá trị k nguyên mà $0 < k \leq 31$ thì có duy nhất một giá trị của x để $S_{\Delta OAB}$ nguyên.

Với mỗi giá trị x như vậy sẽ tồn tại hai dây AB và $A'B'$ mà ΔOAB và $\Delta OA'B'$ có cùng diện tích. Nghĩa là có $31 \cdot 2 = 62$ dây cung thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 62$.

Gọi M là biến cố “chọn được dây AB sao cho diện tích tam giác OAB là số chẵn”. Do từ 1 đến 31 có 15 số chẵn nên số kết quả thuận lợi cho biến cố là: $n(M) = 15 \cdot 2 = 30$.

Khi đó: $P(M) = \frac{30}{62} = \frac{15}{31}$.