

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Cho biểu thức $A = \frac{x-3\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}} + \frac{x+5\sqrt{x}+12}{\sqrt{x}+3}$ (điều kiện $x > 0$). Tìm x để $A = 2x$.

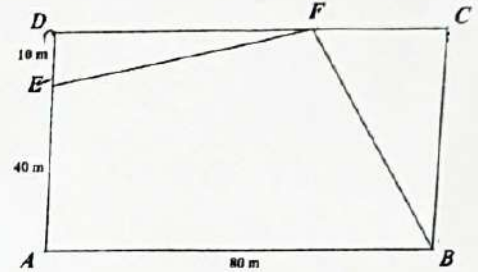
2) Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a \geq 2025, b \geq 2025$ và $2025(a+b) = ab$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt{a-2025} + \sqrt{b-2025} - \frac{1}{45}\sqrt{ab}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x + y = xy + 2 \\ 2x + \sqrt{3y-8} + \sqrt{y+1} = 5 \end{cases}$$

2) Một sân trường hình chữ nhật $ABCD$ (hình minh họa bên). Nhà trường muốn thiết kế hai nhà vệ sinh dành cho giáo viên và học sinh ở hai vị trí E và B sao cho $AE = 40m, DE = 10m, AB = 80m$. Trên cạnh CD người ta muốn chọn một vị trí F để khoan giếng cấp nước cho hai nhà vệ sinh. Hỏi tổng đoạn đường ống nước ngắn nhất từ giếng khoan đến hai nhà vệ sinh là bao nhiêu mét?



Câu 3. (3,0 điểm)

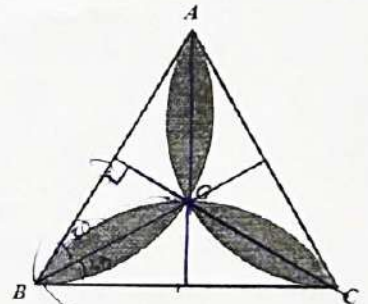
1) Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Kẻ các đường cao AD, BE, CF (D, E, F là chân các đường cao) cắt nhau tại điểm H . Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại P, Q (F nằm giữa P và E), đường thẳng EF cắt BC tại điểm M .

a) Chứng minh: $MP \cdot MQ = ME \cdot MF$.

b) Gọi N là điểm đối xứng của O qua đường thẳng BC . Chứng minh: N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC .

c) Đường thẳng đi qua H , song song với AB và cắt AC tại điểm X . Đường thẳng đi qua H , song song với AC và cắt AB tại điểm Y . Chứng minh: Đường trung trực của đoạn thẳng XY đi qua điểm O .

2) Một Logo như hình vẽ bên. Phần tô đậm là giao của các cặp hình tròn ngoại tiếp các tam giác: $\triangle ABG, \triangle ACG$ và $\triangle BCG$. Tính diện tích phần tô đậm (theo đơn vị cm^2), biết rằng tam giác ABC đều có cạnh bằng $20cm$, G là trọng tâm của tam giác ABC (lấy $\pi = 3,14$, kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Câu 4. (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0$.

2) Cho số nguyên dương n và biểu thức $A = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. Chứng minh: $3A$ chia hết cho $2n+1$ và $\frac{24A+2n+1}{2n+1}$ là một số chính phương.

Câu 5. (1,0 điểm)

1) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca = 3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a+b}{a^2+ab+b^2} + \frac{b+c}{b^2+bc+c^2} + \frac{c+a}{c^2+ca+a^2}.$$

2) Cho đa giác đều 2025 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh tồn tại ba đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân.