

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN THI: TOÁN

(Dùng cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: 04/6/2025
(Đề thi gồm 02 trang)

Câu 1 (2,0 điểm).

1) Cho hai số thực khác nhau a, b và $ab + 1 \neq 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} = \frac{2}{1 + ab}$.

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{1}{a^{2025} + 1} + \frac{1}{b^{2025} + 1}$.

2) Cho $f(x)$ là đa thức bậc 4 có các hệ số nguyên. Biết rằng có bốn giá trị nguyên phân biệt của x để $f(x)$ nhận cùng một giá trị bằng 2025. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên x nào để $f(x)$ có giá trị bằng 2028.

Câu 2 (1,0 điểm).

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 = 2(x + y) \\ xy(x^2 + y^2 - 2) - x^2 - y^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Câu 3 (1,0 điểm). Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số được lập từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5 và 6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp M , tính xác suất chọn được số chia hết cho 3.

Câu 4 (2,0 điểm).

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2x^3 + y^3 + 2x^2y + y^2x = 2xy - 5$.

2) Tìm tất cả các bộ số $(x; y; p)$ thỏa mãn $\frac{xy^3}{x + y} = p$, biết x, y, p là các số nguyên dương và p là số nguyên tố.

Câu 5 (3,0 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC cố định ($BC < 2R$). Điểm A di động trên đường tròn $(O; R)$ sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC .

1) Đường thẳng chứa tia phân giác góc ngoài tại đỉnh H của tam giác BHC cắt AB, AC lần lượt tại hai điểm M, N . Chứng minh tam giác AMN cân.

2) Kẻ các đường cao BE và CF của tam giác ABC . Gọi S là giao điểm thứ hai khác A của đường thẳng AH và đường tròn (O) . Đường thẳng SE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai X (khác S). Chứng minh đường thẳng BX đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF .

3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt tia phân giác của góc BAC tại K . Chứng minh điểm K thuộc một đường tròn cố định.

Câu 6 (1,0 điểm). Trên sân trường có một bảng ô vuông kích thước $6m \times 5m$. Có 15 học sinh mặc áo màu xanh (trong đó chỉ có đúng một học sinh tên An và một học sinh tên Bảo) và 14 học sinh mặc áo màu trắng xếp hình thành chữ LS (viết tắt chữ Lam Sơn) sao cho mỗi học sinh đứng ở một ô vuông $1m \times 1m$, dư lại một ô vuông trống (đánh dấu X), hai học sinh mặc áo xanh tên An và Bảo đứng ở hai ô vuông góc đối diện như hình vẽ (bảng 1).

An				
		X		
				Bảo

Bảng 1

Bảo				
		X		
				An

Bảng 2

Cho phép đổi vị trí các học sinh trong bảng theo quy tắc: Mỗi lần, chọn một học sinh đứng ở ô vuông kề với ô vuông trống rồi chuyển học sinh đó sang ô vuông trống. Hỏi bằng cách thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép chuyển học sinh theo quy tắc trên đối với bảng 1 ta có thể nhận được cách xếp sao cho An và Bảo đổi chỗ cho nhau còn các học sinh khác giữ nguyên vị trí như hình vẽ (bảng 2) hay không? Vì sao?

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh: Lê Gia Trúc

SBD: 862 174

Chữ ký giám thị coi thi 1: [Signature]

Chữ ký giám thị coi thi 2: [Signature]