

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi : TOÁN (chuyên)

Thời gian : 150 phút (không kể thời gian giao đề)
(Dành cho thí sinh thi vào Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn)

Bài 1. (1,5 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x-1}{x-3\sqrt{x}+2} - \frac{x-4\sqrt{x}+14}{x+\sqrt{x}-6} + \frac{x-4\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}} \right) \cdot (x-2\sqrt{x})$ với $x > 0$, $x \neq 1$ và $x \neq 4$. Rút gọn biểu thức A và tính giá trị của A khi x là tổng của 45 số tự nhiên lẻ đầu tiên.

Bài 2. (1,5 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(5;0), B(5;5), C(0;5)$, với O là gốc tọa độ. Bạn An chọn ngẫu nhiên một điểm M có hoành độ và tung độ là các số nguyên, nằm trên các cạnh hoặc nằm trong hình vuông $OABC$.

a) Mô tả không gian mẫu của phép thử trên. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

b) Tính xác suất của biến cố A : "Bạn An chọn được điểm M sao cho diện tích hình vuông $OABC$ nhỏ hơn 5 lần diện tích tam giác OAM ".

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $3(4x^2 - 1) = x(2\sqrt{x^2 + 3x} + 1)$.

b) Trong một đợt thử nghiệm giải toán bằng phần mềm trí tuệ nhân tạo (AI), tổng số câu hỏi mà hai phần mềm C và D phải trả lời là 200 câu hỏi. Kết quả cho thấy: phần mềm C trả lời đúng 90 câu, phần mềm D trả lời đúng 85 câu và tỉ lệ trả lời đúng của phần mềm C cao hơn 5% so với tỉ lệ trả lời đúng của phần mềm D. Tính số câu hỏi mà mỗi phần mềm đã trả lời.

Bài 4. (1,5 điểm)

a) Cho phương trình $4x^2 - 8(m+1)x - 2m - 9 = 0$, với m là tham số. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$2|x_1 - x_2| \geq \sqrt{3}(1 + 2x_1)(1 + 2x_2) + 8\sqrt{3}.$$

b) Xét các số nguyên x, y, z và số nguyên dương n thỏa mãn: $2x^2 + 10xy + 13y^2 = 29^n z$. Chứng minh rằng luôn biểu diễn được z dưới dạng tổng hai bình phương của hai số nguyên.

Bài 5. (2,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Hai tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại M . Các đường thẳng EF và MB cắt nhau tại N . Gọi K là trung điểm BC . Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng BN song song với đường thẳng DF .

b) Ba đường thẳng DE, KN, HM đồng quy.

Bài 6. (1,5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) . Các tia AI, BI và CI lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là D, E và F .

a) Chứng minh rằng đường thẳng EF là đường trung trực của đoạn thẳng AI .

b) Đường thẳng AB cắt các cạnh FE và FD lần lượt tại G và H , đường thẳng BC cắt các cạnh DF và DE lần lượt tại M và N , đường thẳng CA cắt các cạnh ED và EF lần lượt tại P và Q . Chứng minh rằng $\sqrt{AB+BC+CA} = \sqrt{GH} + \sqrt{MN} + \sqrt{PQ}$.

----- HẾT -----