

ĐÁP ÁN ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN NĂM 2025
Môn thi: Toán (Vòng 1)

NGUYỄN KIM SỞ 093.464.1088
Trung tâm Bồi dưỡng và Phát triển tài năng Toán học Nam Sáng – SMATH

Câu I. (3,5đ)

1. Giải phương trình: $x + 2\sqrt{(x+1)(x+6)} + 2\sqrt{x+1} = 2 + 2\sqrt{x+6}$.

Lời giải:

Xét phương trình: $x + 2\sqrt{(x+1)(x+6)} + \sqrt{x+1} = 2 + 2\sqrt{x+6}$ (1).

Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \end{cases}$

Dự đoán $x = 0$ là nghiệm của phương trình (1) nên ta sẽ biến đổi và sử dụng nhân liên hợp để tạo ra nhân tử “x” như sau:

$$x + 2\sqrt{(x+1)(x+6)} + \sqrt{x+1} = 2 + 2\sqrt{x+6}$$

$$x + 2\sqrt{x+1} - 2 + 2\sqrt{(x+1)(x+6)} - 2\sqrt{x+6} = 0$$

$$x + 2(\sqrt{x+1} - 1) + 2\sqrt{x+6}(\sqrt{x+1} - 1) = 0$$

$$x + 2(\sqrt{x+1} - 1)(1 + \sqrt{x+6}) = 0$$

$$x + 2 \frac{x}{\sqrt{x+1} + 1} (1 + \sqrt{x+6}) = 0$$

$$x \left[1 + \frac{2(1 + \sqrt{x+6})}{\sqrt{x+1} + 1} \right] = 0$$

$$\text{Vì } 1 + \frac{2(1 + \sqrt{x+6})}{\sqrt{x+1} + 1} > 0 \text{ nên } x = 0 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 + 7xy + x + 6y = 21 \\ 21(22 - 5y^2 - 5xy + x - 4y) = 27(x + 6y) \end{cases}$$

Lời giải:

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 + 7xy + x + 6y = 21 & (1) \\ 21(22 - 5y^2 - 5xy + x - 4y) = 27(x + 6y) & (2) \end{cases}$$

Ta biến đổi (1): $x^2 + 6y^2 + 7xy + x + 6y = 21$

$(x + 6y)(x + y) + (x + 6y) = 21$

$(x + 6y)(x + y + 1) = 21 (*)$.

Để ý rằng $22 = 21 + 1$ nên thay (1) vào (2) ta được:

$21(22 - 5y^2 - 5xy + x - 4y) = 27(x + 6y)$

$21(x^2 + y^2 + 7xy + x + 6y + 1 - 5y^2 - 5xy + x - 4y) = 27(x + 6y)$

$21(x^2 + y^2 + 2xy + 2y + 2x + 1) = 27(x + 6y)$

$21(x + y + 1)^2 = 27(x + 6y)$

$(x + 6y)(x + y + 1)(x + y + 1)^2 = 27(x + 6y)$

$(x + 6y)[(x + y + 1)^3 - 27] = 0$

Từ (*) ta thấy $x + 6y \neq 0$ nên $(x + y + 1)^3 - 27 = 0 \Rightarrow x + y + 1 = 3 \Rightarrow x + y = 2$.

Khi đó $\begin{cases} x + 6y = 7 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1$.

Tóm lại: $x = 1; y = 1$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho.

Câu II. (2,5đ)

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn: $y + \frac{1}{y} = \frac{x^4 + 6x^2 + 1}{2x(x^2 + 1)}$

Lời giải:

Điều kiện: $x, y \neq 0$.

Nhận xét rằng: x và y luôn cùng dấu, do đó ta chỉ cần xét $x, y > 0$.

Ta biến đổi: $\frac{x^4 + 6x^2 + 1}{2x(x^2 + 1)} = \frac{(x^4 + 2x^2 + 1) + 4x^2}{2x(x^2 + 1)} = \frac{(x^2 + 1)^2 + 4x^2}{2x(x^2 + 1)} = \frac{x^2 + 1}{2x} + \frac{2x}{x^2 + 1}$

Do đó: $y + \frac{1}{y} = \frac{x^2 + 1}{2x} + \frac{2x}{x^2 + 1}$

$$y - \frac{x^2 + 1}{2x} + \frac{1}{y} - \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

$$y - \frac{x^2 + 1}{2x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{\frac{x^2 + 1}{2x}} = 0$$

$$\left(y - \frac{x^2 + 1}{2x}\right) \left[1 - \frac{1}{y \left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right)}\right] = 0$$

Do $x^2 + 1 \geq 2x \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{2x} \geq 2 \Rightarrow y \left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right) \geq 2 \Rightarrow 1 - \frac{1}{y \left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right)} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$ nên phải xảy ra:

$$y - \frac{x^2 + 1}{2x} = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 1}{2x} \Rightarrow 2y = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = 2y - x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(1; 1)$ và $(-1; -1)$.

2. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = \frac{3}{2}$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{\sqrt[3]{a}}{(2-a)^2(a+2b)} + \frac{\sqrt[3]{b}}{(2-b)^2(b+2c)} + \frac{\sqrt[3]{c}}{(2-c)^2(c+2a)}.$$

Lời giải:

Dự đoán điểm rơi tại tâm: $a = b = c = \frac{1}{2}$. Khi đó ta biến đổi, chẳng hạn:

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{(2-a)^2(a+2b)} = \frac{a}{\sqrt[3]{a^2(2-a)^2(a+2b)}} = \frac{a}{\sqrt[3]{2^3 \sqrt[3]{a \cdot a \cdot \frac{1}{2} (2-a)^2(a+2b)}}}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì: $\sqrt[3]{a \cdot a \cdot \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{3} \left(a + a + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \left(2a + \frac{1}{2}\right)$

$$\text{Suy ra: } \sqrt[3]{a \cdot a \cdot \frac{1}{2}} (2-a)^2 \leq \frac{1}{3} \left(2a + \frac{1}{2}\right) (2-a)^2 \leq \frac{1}{3} \left(2a + \frac{1}{2}\right) (2-a)(2-a)$$

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức Cauchy một lần nữa: $\left(2a + \frac{1}{2}\right) (2-a)^2 \leq \left(\frac{2a + \frac{1}{2} + 2-a + 2-a}{3}\right)^3 = \frac{27}{8}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a \cdot a \cdot \frac{1}{2}} (2-a)^2 \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{8} = \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{a}}{(2-a)^2(a+2b)} \geq \frac{a}{\frac{9 \cdot \sqrt[3]{2}}{8} (a+2b)} = \frac{8}{9 \cdot \sqrt[3]{2}} \cdot \frac{a}{a+2b}$$

$$\text{Tương tự cũng có: } \frac{\sqrt[3]{b}}{(2-b)^2(b+2c)} \geq \frac{8}{9 \cdot \sqrt[3]{2}} \cdot \frac{b}{b+2c} \text{ và } \frac{\sqrt[3]{c}}{(2-c)^2(c+2a)} \geq \frac{8}{9 \cdot \sqrt[3]{2}} \cdot \frac{c}{c+2a}$$

$$\text{Suy ra: } M = \frac{\sqrt[3]{a}}{(2-a)^2(a+2b)} + \frac{\sqrt[3]{b}}{(2-b)^2(b+2c)} + \frac{\sqrt[3]{c}}{(2-c)^2(c+2a)} \geq \frac{8}{9 \cdot \sqrt[3]{2}} \left(\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a}\right).$$

Đến đây biến đổi và sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwartz dạng Engel ta được:

$$\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} = \frac{a^2}{a^2+2ab} + \frac{b^2}{b^2+2bc} + \frac{c^2}{c^2+2ca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+2ab+b^2+2bc+c^2+2ca} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1.$$

Do đó: $M \geq \frac{8}{9\sqrt[3]{2}}$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{8}{9\sqrt[3]{2}}$.

Câu III. (3,0đ)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Trên các cạnh CA, AB lần lượt lấy các điểm E, F (không trùng các đỉnh tam giác) sao cho $AE = AF$. Trên đường thẳng EF lấy các điểm M, N sao cho CM vuông góc CA, BN vuông góc BA. K là giao điểm của BN và CM.

1) Chứng minh rằng $KM = KN$.

2) Dụng các hình bình hành ANQF và AMRE. Chứng minh rằng $\widehat{NQK} = \widehat{MRK}$.

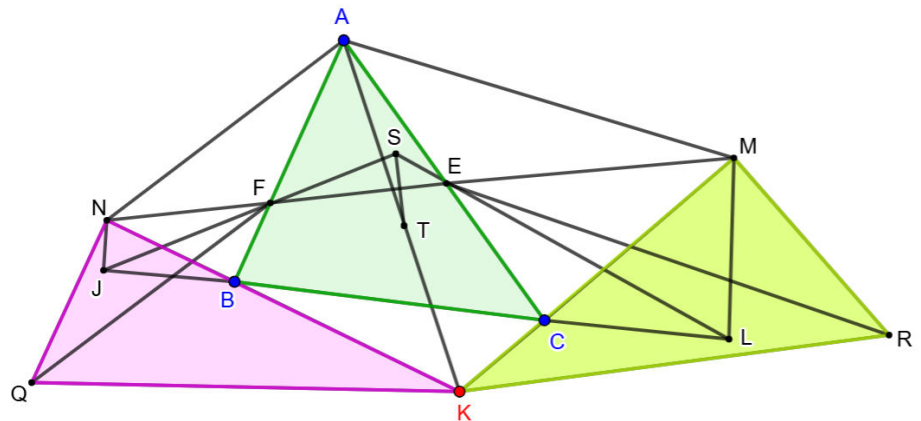
3) Gọi L, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên đường thẳng BC, S là giao điểm của JF và LE, T là điểm đối xứng với S qua EF. Chứng minh rằng A, T, K thẳng hàng.

Lời giải:

1. Vì $AE = AF$ nên tam giác AEF cân tại A $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{AFE} \Rightarrow \widehat{CEM} = \widehat{BFN}$ (các góc đối đỉnh tương ứng).

Mà $\widehat{CME} = 90^\circ - \widehat{CEM}$ và $\widehat{BNF} = 90^\circ - \widehat{BFN}$ suy ra: $\widehat{CME} = \widehat{BNF} \Rightarrow$ tam giác KMN cân (dấu hiệu nhận biết) $\Rightarrow KM = KN$.

2. Do ANQF là hình bình hành nên $NQ = AF$ và $AB \parallel QN \Rightarrow QN \perp NC \Rightarrow$ tam giác NQC vuông tại N.



Tương tự cũng có tam giác MRK vuông tại M và $MR = AE$.

Kết hợp với $AE = AF$ suy ra $NQ = MR$.

Xét hai tam giác vuông NQK và MRK có $\begin{cases} NQ = MR \\ KN = KM \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \Delta NQK = \Delta MRK \Rightarrow \widehat{NQK} = \widehat{MRK}$ (hai góc tương ứng).

c) Đường thẳng qua S vuông góc với BC cắt EF tại P. P' là giao điểm của AK và EF. Ta sẽ chứng minh $P \equiv P'$.

Thật vậy,

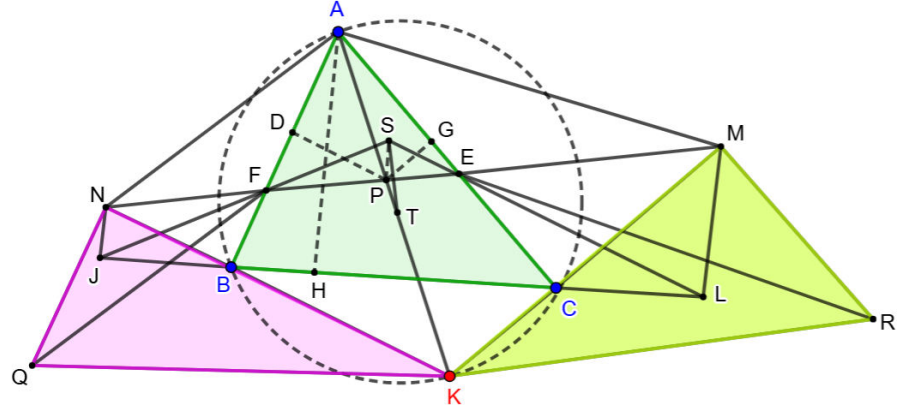
Sử dụng hệ quả của định lý Thalès ta có:

$$\frac{SP}{NJ} = \frac{PF}{FN} \text{ và } \frac{SP}{ML} = \frac{PE}{EM}$$

$$\Rightarrow \frac{PE}{EM} : \frac{PF}{FN} = \frac{SP}{ML} : \frac{SP}{NJ}$$

$$\Rightarrow \frac{PE}{PF} \cdot \frac{FN}{EM} = \frac{NJ}{ML}$$

$$\Rightarrow \frac{PE}{PF} = \frac{NJ}{ML} \cdot \frac{EM}{FN}$$



Theo kết quả phần trên thì $\widehat{KMN} = \widehat{KNM} \Rightarrow$ hai tam giác vuông BNF và CME đồng dạng $\Rightarrow \frac{EM}{FN} = \frac{CM}{BN}$

$$\text{Do đó: } \frac{PE}{PF} = \frac{NJ}{ML} \cdot \frac{CM}{BN} = \frac{NJ}{BN} \cdot \frac{CM}{ML} = \frac{NJ}{BN} : \frac{MK}{CM} = \frac{\sin \widehat{JBN}}{\sin \widehat{LCM}} = \frac{\sin \widehat{KBC}}{\sin \widehat{KCB}}$$

Hai tam giác vuông BAK và CAK cùng nội tiếp đường tròn đường kính AK nên tứ giác ABKC nội tiếp. Suy ra $\widehat{KBC} = \widehat{KAC}$ (cùng chắn cung KC) và $\widehat{KCB} = \widehat{KAB}$ (cùng chắn cung KB).

$$\text{Do đó: } \frac{PE}{PF} = \frac{\sin \widehat{KBC}}{\sin \widehat{KCB}} = \frac{\sin \widehat{KAC}}{\sin \widehat{KAB}} = \frac{KC}{KA} : \frac{KB}{KA} = \frac{KC}{KB} \quad (1).$$

Gọi D, G lần lượt là hình chiếu của P' lên AB, AC.

$$\text{Khi đó: } \frac{P'E}{P'F} = \frac{S_{\triangle AP'E}}{S_{\triangle AP'F}} = \left(\frac{1}{2} AE \cdot P'G \right) : \left(\frac{1}{2} AF \cdot P'D \right) = \frac{P'G}{P'D} \quad (2).$$

$$\text{Theo hệ quả của định lý Thalès thì } \frac{P'G}{KC} = \frac{P'A}{AK} \text{ và } \frac{P'D}{KB} = \frac{P'A}{AK} \text{ suy ra } \frac{P'G}{KC} = \frac{P'D}{KB} \Rightarrow \frac{P'G}{P'D} = \frac{KC}{KB} \quad (3).$$

$$\text{Kết hợp (1), (2) và (3) ta được: } \frac{PE}{PF} = \frac{P'E}{P'F} \Rightarrow P \equiv P'.$$

Gọi H là hình chiếu của A lên BC, khi đó:

$$\widehat{CKA} = \widehat{CBA} \text{ (cùng chắn cung AC) hay } \widehat{CKA} = \widehat{HBA}.$$

$$\text{Mà } \widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{HBA}, \widehat{KAC} = 90^\circ - \widehat{CKA} \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{KAC}.$$

$$\text{Vì } SP \parallel AH \Rightarrow \widehat{SPA} = \widehat{PAH} = \widehat{BAC} - (\widehat{BAH} + \widehat{KAC}) = 180^\circ - (\widehat{AFE} + \widehat{AEF}) - (\widehat{BAH} + \widehat{KAC})$$

$$= 180^\circ - 2\widehat{AEF} - 2\widehat{KAC} = 180^\circ - 2(\widehat{AEF} + \widehat{KAC}) = 180^\circ - 2\widehat{EPK}.$$

Mặt khác:

$$\widehat{SPA} = 180^0 - \widehat{APF} - \widehat{SPE} = 180^0 - \widehat{EPK} - \widehat{SPE} \Rightarrow 180^0 - 2\widehat{EPK} = 180^0 - \widehat{EPK} - \widehat{SPE} \\ \Rightarrow \widehat{EPK} = \widehat{SPE}.$$

Do T đối xứng với S qua EF nên $\widehat{SPE} = \widehat{EPT} \Rightarrow \widehat{EPK} = \widehat{EPT} \Rightarrow PT \equiv PK$ hay ATK thẳng hàng.

Đến đây bài toán được chứng minh hoàn chỉnh.